衡敛系统的性质及其推导

赵峰

[1]（南阳仲水环保技术应用中心　南阳市　473000）

摘　要　开放系统能够构建衡敛的状态，成为衡敛系统，根据收敛级数的性质进行系统结构解析，得出衡敛系统的三个基本性质，可对衡敛系统结构进行分解和组合。通过对衡敛系统性质的进一步推导，又得出了衡敛系统的守恒律和相对律，由此形成了研究复杂性科学的新理论和方法，能够实现从定性到定量、从微观到宏观进行系统科学研究，这种运用衡敛系统理论的分析方法，是一条进行复杂性科学研究的新路径。

关键词　系统科学；衡敛系统；收敛级数；结构解析；结合律

中图分类号　N94-0　　　　文献标识码　A

Nature of the constant convergence system and its derivation

Zhao Feng

(*Nanyang Zhongshui Enrironmental Protection Technology Application Center , Nanyang, Henan, 473000，China*)

【**Abstract** 】Open system to build the state of constant convergence,To become constant convergence system, According to the nature of Convergence Analysis of system structure, Are three basic nature of the constant convergence system, Can be decomposed and the combination of constant convergence of the system architecture. The nature of the constant convergence of the system by further derivation, Constant convergence of the system has obtained conservation laws and the relative law, Thus creating a new theory and method of complexity science, Can be achieved from qualitative to quantitative, from micro to macro systematic scientific research, The analysis of the use of the constant convergence of system theory, Is a new path of complexity science research.

【Key words】System science; Constant Convergence System; convergent series; Structural Analysis; Associative rule;

0　引　言

20 世纪 40 年代贝塔朗菲就在一般系统论中提出，我们被迫在一切知识领域运用“复杂”或“系统”概念来处理复杂性问题[1]，作为具有复杂性的系统科学也被科学人士认为将成为一门 21 世纪的科学[2]，复杂性科学的研究提供了若干概念（系统、信息、反馈、组织、自组织等）和方法论思想（对还原论的质疑和超越）[3]，其中包括钱学森教授提出的从定性到定量的综合集成方法[4]，但是，对于开放的复杂巨系统目前还没有形成从微观到宏观的理论，没有从子系统相互作用出发，构筑出来的统计力学理论[5]。因此，对于系统科学或者复杂性科学的研究缺少基础性理论及方法论的支撑，其中的重点之一是能够从系统的结构性上提供有效的理论工具，本文是利用数学中收敛级数的性质，对具有级数收敛特点的衡敛系统进行系统状态结构的解析，得出衡敛系统性质，进一步从衡敛系统性质中推导系统的状态定律。

1　衡敛系统结构解析的方法

1.1　确定结构解析的对象

开放系统具有衡敛性内在状态属性，可以建立相应的系统状态衡敛方程[6]，系统的状态衡敛性表示系统状态具有级数收敛的特性，根据级数收敛的概念和性质能够对系统状态模式进行分解和分析，因此，基于衡敛状态方程及收敛级数的性质，可把具有衡敛性的开放系统作为结构研究的对象。

系统以衡敛状态模式为解析对象，系统衡敛状态方程为：

$$S_t = F_b : \left(t \cdot M_0^{+} + \alpha \cdot O\right) \tag{1}$$

式（1）中：

S_t —— 状态值（量），开放系统状态经过 t 时后未衰减的状态值（量）；

t —— 系统状态的衰减时间；

M_0^+ —— 单位时间输入开放系统的成分中难衰减的值（量）；

O —— 对应开放系统的状态衡敛值；

α —— 衡敛系数，衡敛系统中可衰减值与衡敛值的比，$1 \geqslant \alpha \geqslant 0$；

F_b —— 系统边界条件的干扰作用；

式（1）中，由于 F_b 是系统的边界条件干扰，属于外部作用，不属于本文解析的结构内容，因此本文对应的状态方程是指基本态，F_b 取值为 1，则解析对象的状态方程为：

$$S_t = t \cdot M_0^+ + \alpha \cdot O \qquad (2)$$

1.2 结构解析的工具

以数学分析为工具，利用收敛级数的概念和性质[7]对衡敛系统的结构进行分析。

高等数学中相关的级数性质：

1. 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛，c 为任一非零常数，则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} cu_n$ 也收敛；且有 $\sum_{n=1}^{\infty} cu_n = c\sum_{n=1}^{\infty} u_n$.

2. 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 均收敛，对于任何非零常数 c_1、c_2，则级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(c_1u_n \pm c_2v_n)$ 收敛，且有 $\sum_{n=1}^{\infty}(c_1u_n \pm c_2v_n) = c_1\sum_{n=1}^{\infty} u_n \pm c_2\sum_{n=1}^{\infty} {}_n v$

3. 添加、去掉、改变级数的有限项，级数的敛散性不变.

4. 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛，则对级数的项任意加括号后，所得新级数仍收敛且和不变.

1.3 三种结构解析模式

对三种情况下系统的衡敛状态结构进行解析：

1. 从系统内部成分差异角度入手，进行成分性结构解析；
2. 从平行输入关系的角度入手，进行并联式结构解析；
3. 从层次性输入-输出的角度入手，进行串联式结构解析；

2 衡敛系统的结构解析及性质

2.1 系统成分性结构解析及性质

在系统衡敛状态模式的概念定义中，将输入系统中的单位时间输入量 M_0 的成分区分为可衰减成分 M_0^- 和难衰减成分 M_0^+，可衰减成分和难衰减成分是相对而言的，对于非单一性成分的系统来讲，可衰减成分包含至少一种可衰减成分，难衰减成分包含至少一种难衰减成分，对照系统内部状态的衡敛方程模式 $S_t = t \cdot M_0^+ + \alpha \cdot O$，根据级数收敛的性质，将系统衡敛值 O 看成若干结构性衡敛值的和，故可以将衡敛状态方程看做是对应某一时间 t 时的状态为存在某一难衰减值 M_0^+ 及由若干子系统衡敛值的和。衡敛值的表示为：

$$\alpha \cdot O = \alpha_1 \cdot O_1 + \cdots\cdots + \alpha_n \cdot O_n \qquad (3)$$

将（3）代入（2），则系统状态的衡敛方程变换为：

$$S_t = t \cdot M_0^+ + \alpha_1 \cdot O_1 + \cdots\cdots + \alpha_n \cdot O_n \qquad (4)$$

其中，O_1 为系统成分中可衰减成分 1 的衡敛值，α_1 为成分 1 对应的衡敛系数，O_n 为系统成分中 n 可衰减成分的衡敛值，α_n 为对应 n 成分的衡敛系数。

由式（4）得出非单一成分构成系统的衡敛状态模式及子系统状态关系，由此得到系统衡敛结构的性质 1：

对于非单一构成的衡敛系统，系统的状态值等于系统构成中各成分状态值的和。

2.2 系统平行输入的结构解析及性质

根据收敛级数的性质：对于收敛级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$，c 为任一非零常数，则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} cu_n$ 也收敛，且有 $\sum_{n=1}^{\infty} cu_n = c\sum_{n=1}^{\infty} u_n$；

因此，对于系统状态的衡敛方程$S_t = t \cdot M_0^+ + \alpha \cdot O$来讲，初始的单位时间输入量$M_0$是一个常数，对于任一非零常数$c$，$c \cdot M_0$存在，$t \cdot M_0^+$也是一个常数，故$c \cdot t \cdot M_0^+$存在，衡敛系数$1 \geqslant \alpha \geqslant 0$，而$\alpha = 0$的情况存在于系统的初始状态，系统尚未形成输入，故没有实际意义，在系统运行时，α以非零常数的形式存在；那么对于任一非零常数c，当系统的单位输入量为$c \cdot M_0$时，系统的衡敛状态方程为：

$$c \cdot S_t = c \cdot (t \cdot M_0^+ + \alpha \cdot O) \tag{5}$$

由此表明，通过改变系统单位时间的输入量，可以建立平行的并联式衡敛状态关系。

在$1 > c > 0$情况下，是对系统基本衡敛状态的平行分解；

在$c > 1$情况下，是倍数的形式对基本系统状态平行放大；

对衡敛系统平行输入构成的并联式系统结构状态关系，总结得出衡敛结构的性质2：

系统的衡敛方程$S_t = t \cdot M_0^+ + \alpha \cdot O$成立，那么对于任何非零常数$c$，构成新的系统衡敛方程：$c \cdot S_t = c \cdot (t \cdot M_0^+ + \alpha \cdot O)$也成立。

2.3 系统层次性输入-输出的结构解析及性质

系统衡敛状态模式可从输入-输出的角度建立层次性的状态结构关系，先将单位时间输入量M_0转化为下式：

$$M_0 = (M_0 - M_1) + (M_1 - M_2) + \cdots\cdots + (M_{n-1} - 0) \tag{6}$$

式（6）中，M_0为初始的单位时间系统输入量，对系统的衡敛状态按照输入量流程式的顺序进行层次性的分界，将衡敛系统分界为n个顺序的层次性子系统，M_1既是第一层子系统的输出量，也是第二层子系统的输入量，依次排列，M_2既是第二层子系统的输出量，也是第三层子系统的输入量；M_{n-1}既是第$n-1$层子系统的输出量，也是第n层子系统的输入量。系统中$M_0 = M_0 - 0$，M_0代表系统的净输入量，故末端输出量设为零。

每一个子系统形成该子系统的衡敛状态模式，根据收敛级数性质，系统衡敛状态等于各层次子系统衡敛状态的和，即：

$$S_t = t \cdot M_0^+ + \alpha \cdot O$$

$$= (t \cdot M_1^+ + \alpha_1 \cdot O_1) + (t \cdot M_2^+ + \alpha_2 \cdot O_2) + \cdots\cdots + (t \cdot M_n^+ + \alpha_n \cdot O_n) \tag{7}$$

式（7）中，M_n^+为单位时间输入第n层子系统相应输入量的难衰减值，是一个常数项，α_n是第n层子系统的状态衡敛系数，O_n是第n层子系统的状态衡敛值。

由式（7）得出，系统衡敛状态可变换为层次性子系统的串联式衡敛状态模式，得出串联式衡敛结构的性质3：

衡敛系统状态值等于将该系统变换为多层次子系统后层次性衡敛子系统状态值的和。

3 对衡敛系统性质的推导

在所得出衡敛系统性质的基础上进行推导，得出衡敛系统的两条系统状态定律。

3.1 衡敛系统的状态值（量）守恒定律

对所得出的衡敛系统结构性质1、3进行推导，可以得出，衡敛系统能够进行结构性分解，分解为至少两个衡敛子系统。在一定边界条件下，衡敛系统具有一定的状态值，将该衡敛系统进行结构性分解为若干子系统，衡敛子系统的状态值为S_n，由衡敛系统结构性质1、3得出，衡敛系统的状态值不受衡敛子系统的数量及形式影响，即衡敛系统的状态值保持恒定。

由此得出衡敛系统状态值守恒定律（简称衡敛系统守恒律）：

一定边界条件下衡敛系统状态值守恒且恒等于该衡敛系统结构性衡敛子系统状态值的和。

即：$$S_t \equiv S_1 + S_2 + \cdots\cdots + S_n \tag{8}$$

3.2 衡敛系统的结构状态相对性定律

对所得衡敛系统结构性质1、3进行推导，把多个衡敛子系统进行组合，即可以合成为至少一个衡敛系统。

当一个衡敛系统转换为由两个衡敛子系统构成时，由式(8)得出：$S_t \equiv S_1 + S_2$，根据衡敛系统状态值的守恒定律，当

系统状态值S_t恒定，那么衡敛子系统状态值S_1与S_2在量度的态势上呈反向关系，状态值S_1大则状态值S_2小，状态值S_1小则状态值S_2大，S_1与S_2是相反的消长态势。

由此得出衡敛系统的状态相对性定律（简称衡敛系统相对律）：

衡敛系统的状态方程能够变换为两个衡敛子系统状态方程的和，在一个由任意两个衡敛子系统构成的衡敛系统中，衡敛子系统的状态值（量）的和守恒，但消长的态势相反。

4 结果

根据级数收敛的性质，得出三种系统衡敛状态结构解析模式及性质：

衡敛结构性质 1：

对于非单一构成的衡敛系统，系统的状态值等于系统构成中各成分状态值的和。

即：$S_t = t \cdot M_0^+ + \alpha_1 \cdot O_1 + \cdots\cdots + \alpha_n \cdot O_n$

衡敛结构性质 2：

系统的衡敛方程$S_t = t \cdot M_0^+ + \alpha \cdot O$成立，那么对于任何非零常数$c$，构成新的系统衡敛方程 $c \cdot S_t = c \cdot (t \cdot M_0^+ + \alpha \cdot O)$也成立。

衡敛结构性质 3：

衡敛系统状态值等于将该系统变换为多层次子系统后层次性衡敛子系统状态值的和。即：

$$S_t = (t \cdot M_1^+ + \alpha_1 \cdot O_1) + (t \cdot M_2^+ + \alpha_2 \cdot O_2) + \cdots\cdots + (t \cdot M_n^+ + \alpha_n \cdot O_n)$$

从衡敛系统的性质推导，得到两条衡敛系统的状态定律：

1、衡敛系统守恒律：

一定边界条件下衡敛系统状态值守恒且恒等于该衡敛系统结构性衡敛子系统状态值的和。

即：$S_t \equiv S_1 + S_2 + \cdots\cdots + S_n$

2、衡敛系统相对律：

衡敛系统状态方程能够变换为两个衡敛子系统状态方程的和，在一个由任意两个衡敛子系统构成的衡敛系统中，衡敛子系统的状态值（量）的和守恒，但消长的态势相反。

5 讨论

5.1 系统内部性输入的干扰

对于一个系统来讲，系统的直接输入是来自系统的外部，一定边界条件下，系统的衡敛状态是相对稳定的。在一个多成分的系统中，根据系统衡敛状态的相关概念，相对而言将系统的成分区分为可衰减成分和难衰减成分。难衰减成分的衰减速率相对较慢，随着时间的延长，难衰减成分逐步地转化为可衰减成分，并构成新的衡敛子系统。

在难衰减成分转化为可衰减成分的过程中，难衰减成分在系统中随时间延长而数量累积。对一个累积的从难衰减成分转化为可衰减成分的衡敛子系统来说，对于该子系统的内容输入，一方面来自大系统（初始系统）的外部输入中难衰减成分，另一方面来自系统长期累积的难衰减成分，把从系统内部累积的难衰减成分中转化为可衰减成分的部分称为系统的内部性输入。在存在内部性输入的子系统中，形成衡敛子系统的初期，可衰减成分为内部性输入与外部输入的和，可衰减成分的总量大，系统在该阶段表现为衰减速率相对较大。由于系统的内部性输入就是对正常性输入的干扰，因此，对新的子系统分析时需增加状态干扰分析的方法。

用一个类似实例来说明，如：在微生物细胞的生长过程中，经过最初是一个延迟期，一定时间后细胞的生长开始进入对数增长的快速增长阶段，对数增长期之后，细胞生长进入减速增长期、稳定期、衰亡期。在该实例中，由于延迟期的有机物输入量存在时间性累积，该阶段有机物基质的总量是外部输入和内部累积量之和，根据 Monod 关系式[8]，微生物增长速率与有机物浓度之间存在正比关系，有机物基质的数量大有利于细胞数量的增长，因此在延迟期之后的增长期呈现对数增长的特点。随着内部有机物累积量的消耗，在外部输入稳定的情况下，细胞增长速率减慢，即进入减速增长期；随着延迟期时累积性有机物的耗尽，为细胞增长提供的有机质主要来自于系统外部输入，细胞的增长即进入相对的稳定阶段。

由此可见，累积性的系统内部输入对系统状态产生了干扰，需进行阶段性和结构性的状态分析。

5.2 系统衡敛状态的结合律

根据收敛级数的性质 1、2、3、4，收敛的级数可以进行分解和组合，系统的衡敛状态模式是由常数项和收敛级数构成，

同样适用级数收敛性质的结合律。通过系统衡敛状态的分解、组合、添加等结合律方式，就能够构成新的衡敛状态模型，形成整体系统与子系统、子系统与子系统、子系统与大系统等不同的衡敛结构关系。由此得到，对系统衡敛状态的解析可采用系统衡敛结构的加减结合律。

利用系统衡敛状态的结构解析模式，通过对衡敛系统进行并联、串联、结构性的组织和结合，用结构分解的方式，可把宏观系统分解为微观系统，可以实现对微观系统的研究，用结构结合的方式，可把子系统组合为大系统，实现对宏观系统的研究；这种约束性的系统衡敛态的分解与结合，以及系统关系分析，可在微观系统与宏观系统之间架设一条研究路径。

污泥衡敛消纳法[9]是一种基于污泥衡敛状态模式进行污染物处理的方法，以污水处理为例，一般是流程式的系统，污染物为可降解衰减的有机物，通过污泥衡敛消纳技术及衡敛结构的结合律，可构建污水处理系统中的结构性状态关系，有助于建立水体系统污水治理的状态分析。

6 结论

本文针对衡敛系统的状态模式，根据收敛级数的性质进行衡敛结构解析，得出衡敛系统的三个性质及两条状态定律，为研究复杂性科学提供了新理论和方法。

1、衡敛系统的结构性质：

性质 1：对于非单一构成的衡敛系统，系统的状态值等于系统构成中各成分状态值的和。即：

$$S_t = t \cdot M_0^+ + \alpha_1 \cdot O_1 + \cdots\cdots + \alpha_n \cdot O_n$$

性质 2：系统的衡敛方程 $S_t = t \cdot M_0^+ + \alpha \cdot O$ 成立，那么对于任何非零常数 c，构成新的系统衡敛方程 $c \cdot S_t = c \cdot (t \cdot M_0^+ + \alpha \cdot O)$ 也成立。

性质 3：衡敛系统状态值等于将该系统变换为多层次子系统后层次性衡敛子系统状态值的和。即：

$$S_t = (t \cdot M_1^+ + \alpha_1 \cdot O_1) + (t \cdot M_2^+ + \alpha_2 \cdot O_2) + \cdots\cdots + (t \cdot M_n^+ + \alpha_n \cdot O_n)$$

2、衡敛系统的状态定律：

衡敛系统守恒律：一定边界条件下衡敛系统状态值守恒且恒等于该衡敛系统结构性衡敛子系统状态值的和。即：

$$S_t \equiv S_1 + S_2 + \cdots\cdots + S_n$$

衡敛系统相对律：衡敛系统的状态方程能够变换为两个衡敛子系统状态方程的和，在一个由任意两个衡敛子系统构成的衡敛系统中，$S_t \equiv S_1 + S_2$，两个衡敛子系统状态值（量）的和守恒，但消长的态势相反。

参考文献[参考资料]

[1] 冯.贝塔朗菲. 一般系统论[M]. 林康义译. 北京：清华大学出版社. 1987.2

[2] 戴汝为. 复杂巨系统科学——一门 21 世纪的科学[J]. 自然杂志 . 1997 年 04 期

[3] 苗东升. 复杂性研究的现状与展望[J]. 系统辩证学学报. 2001 年 04 期

[4] 钱学森等， 论系统工程（新世纪版）[M]， 上海： 上海交通大学出版社， 2007.1

[5]钱学森.于景元.戴汝为.一个科学新领域——开放的复杂巨系统及其方法论.自然杂志.1990 年第 1 期

[6] 赵峰. 开放系统状态的收敛表达式 [OL]. [2010.11.23]. http://www.paper.edu.cn/index.php/default/releasepaper/content/201011-526

[7] 同济大学数学系 编. 高等数学（第 6 版）[M]. 北京：高等教育出版社. 2007.4

[8] 排水工程（下册）. 哈尔滨建筑工程学院主编 [M]. 北京：中国建筑工业出版社. 1987

[9] 赵峰. 污泥衡敛消纳法的应用分析[J]. 中国科技论文在线精品论文，2010，3(24)：2512-2516.

7 作者简介

作者：赵峰(1970－),男,工程师,主要研究领域：系统科学，资源环境。